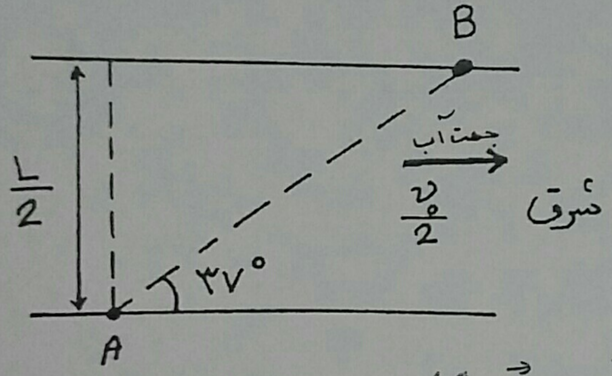
۱. رودخانه‌ای به عرض $\frac{L}{2}$ در نظر بگیرید. قایقرانی می‌خواهد به طور مستقیم از A به B (مطابق شکل) برود. با فرض ساکن بودن آب، قایقران این مسیر را طی می‌کند. اگر آب در رودخانه، با سرعت $\frac{v_0}{2}$ به سمت شرق جریان یابد:

الف) سرعت قایق نسبت به آب و سمت‌گیری قایق در چه جهتی باشد (بر حسب v_0 و بردارهای یکه $\hat{i}$ و $\hat{j}$ در دستگاه $y\uparrow \; x\rightarrow$) تا با سرعت v_0 به نقطه‌ی B برسد؟(محاسبه‌ی سینوس یا تانژانت زاویه‌ی سمت‌گیری کافی است.)

ب) چقدر طول می‌کشد تا قایق به نقطه‌ی B برسد؟(بر حسب معلومات مسئله)

(۴ نمره)

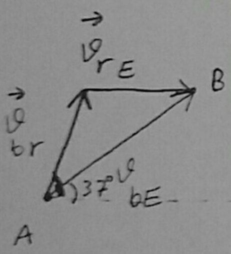


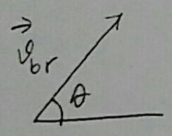
b = قایق

r = رودخانه

E = زمین

۱ نمره $\vec{v}_{bE} = \vec{v}_{br} + \vec{v}_{rE} \Rightarrow \vec{v}_{br} = \vec{v}_{bE} - \vec{v}_{rE}$





$v_{br,x} = v_0 \cos 37^\circ - v_0/2 = 0/8 v_0 - 0/5 v_0 = 0/3 v_0$

۱ نمره $v_{br,y} = v_0 \sin 37^\circ = 0/6 v_0$

$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_{br,y}}{v_{br,x}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0/6}{0/3}\right) = tg^{-1}(2)$ ۰/۵ نمره

$|v_{br}| = \sqrt{(0/3 v_0)^2 + (0/6 v_0)^2} = \dots$

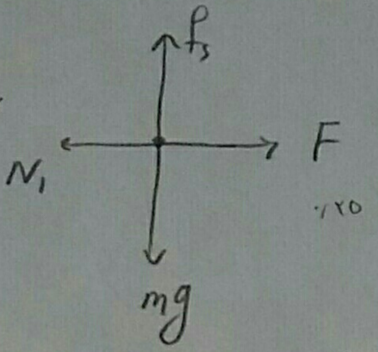
ب)

۱ نمره $\Delta y = \frac{L}{2}, \quad v_{bE,y} = v_0 \sin 37^\circ = 0/6\, v_0$

$\Rightarrow y - y_0 = v_{bE,y}\, t \Rightarrow t = \frac{L/2}{0/6\, v_0} = \frac{L}{1/2\, v_0}$

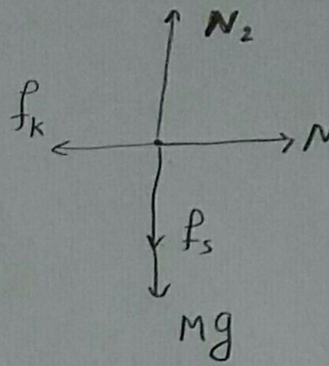
سوال 2)

نمودار جسم آزاد m



۰/۲۵

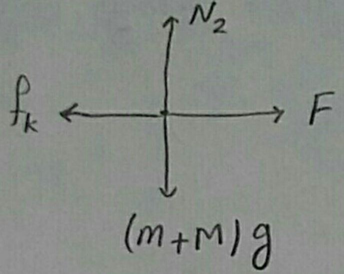
نمودار جسم آزاد M



۰/۲۵

نمودارها ۱ نمره

نمودار جسم آزاد (m+M)



۰/۲۵

الف) شرط اینکه m نلغزد $\Rightarrow$

$$\begin{cases} f_{s\,max} - mg = 0 & ۰/۲۵ \\ \mu_s \cdot N_1 - mg = 0 \Rightarrow N_1 = \dfrac{mg}{\mu_s} & ۰/۲۵ \end{cases}$$

برای (m+M) $\Rightarrow$

$$\begin{cases} N_2 - (m+M)g = 0 \Rightarrow N_2 = (m+M)g = 6mg & ۰/۲۵ \\ F - f_k = (m+M)a \Rightarrow F - \mu_k \cdot N_2 = (m+M)a & ۰/۲۵ \end{cases}$$

$$\Rightarrow F - 6mg\,\mu_k = 6ma$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F - 6mg\,\mu_k = 6ma \\ F - N_1 = ma \end{cases} \Rightarrow \quad F - 6mg\,\mu_k = 6(F - N_1) = 6F - \frac{6mg}{\mu_s} \quad ۰/۵$$

$$5F = 6mg\left(\frac{1}{\mu_s} - \mu_k\right) = \frac{6}{5}(2.3)\,mg = 2.76\,mg$$

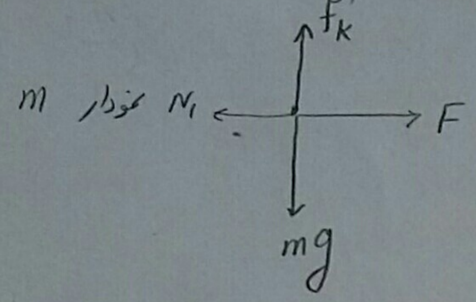
ب)

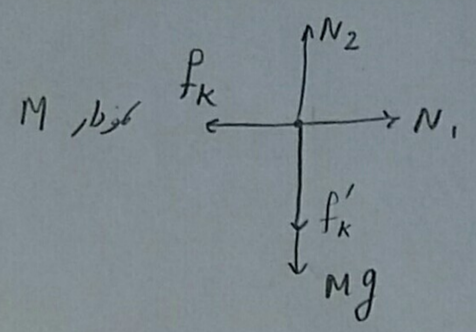
$$F - N_1 = ma \Rightarrow 2.76\,mg - \frac{mg}{\mu_s} = ma$$

$$\Rightarrow a = 27.6 - 25 = 2.6\ m/s^2 \quad ۰/۵$$

سوال ۲

ج)





برای جرم m

① $mg - f'_k = ma_y \Rightarrow mg - \mu_k \cdot N_1 = ma_y$ ۰/۷۵

② $F - N_1 = ma_x$ ۰/۵

برای جرم M

③ $N_1 - f_k = Ma_x \Rightarrow N_1 - \mu_k \cdot N_2 = Ma_x$ ۰/۵

④ $N_2 - f'_k - Mg = 0 \Rightarrow N_2 = Mg + \mu_k \cdot N_1$ ۰/۵

③ $\Rightarrow N_1 - \mu_k \cdot (Mg + \mu_k \cdot N_1) = Ma_x = 5ma_x = 5(F - N_1)$

$\Rightarrow N_1 - \mu_k(5mg + \mu_k \cdot N_1) = 5F - 5N_1$

$\Rightarrow N_1(6 - \mu_k^2) = 5F + 5mg\mu_k = 10mg + mg = 11mg$

$\Rightarrow N_1 = \frac{11mg}{5.96} = 1.85mg$

$\Rightarrow F - N_1 = ma_x \Rightarrow 2mg - 1.85mg = ma_x \Rightarrow a_x = 20 - 18.5 = 1.5\ m/s^2$

① از طرفی $\Rightarrow mg - \mu_k \cdot N_1 = ma_y \Rightarrow mg - 1.85mg\mu_k = ma_y$

$a_y = 10 - 3.7 = 6.3\ m/s^2$

۰/۷۵ ← محاسبات و جواب

$\vec{a} = 1.5\hat{i} - 6.3\hat{j}$

۳. مطابق شکل سورتمه‌ای به جرم m توسط اسبی به جرم $M' = 5m$ روی سطح افقی با ضریب اصطکاک $\mu_k = 0.5$ طوری کشیده می‌شود که شتاب مشترک آنها $a = \frac{g}{10}$ است.

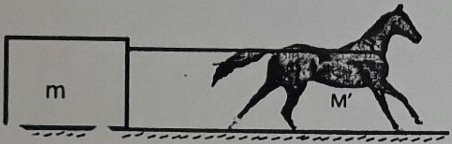
الف) با رسم نمودار جسم آزاد برای سورتمه، نیروی کشش طناب افقی را بر حسب mg به دست آورید.

ب) با رسم نمودار جسم آزاد برای اسب، نیروی اصطکاک وارد بر اسب را به دست آورید.

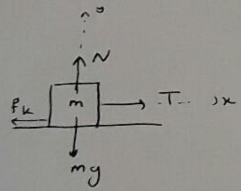
ج) با استفاده از برایند نیروهای اصطکاک فوق نیز شتاب مجموعه را به دست آورید.

د) برای عدم لغزش پاهای اسب (نعل‌ها) حداقل ضریب اصطکاک بین نعل‌ها و زمین را محاسبه کنید.

(۶ نمره)



الف)



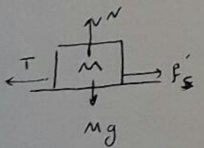
$y: N - mg = 0 \Rightarrow N = mg$

$x: T - f_k = m a_x = \frac{mg}{10}$, $f_k = N\mu_k = \frac{mg}{2}$

$\Rightarrow T = \frac{6}{10} mg$

(۲)

ب)



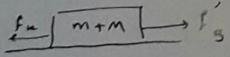
$y: N' - Mg = 0 \Rightarrow N' = Mg$

$x: f'_s - T = M a_x$, $T = \frac{6}{10} mg$ $M = 5m$

$\Rightarrow f'_s = T + 5m a_x \Rightarrow f'_s = \frac{11}{10} mg$

(۱,۵)

ج)



$f'_s - f_k = (m+M) a$

$\frac{11}{10} mg - \frac{1}{1} mg = 6 m a \Rightarrow a = \frac{1}{10} g$

(۱)

د)

$f_{s,max} \geq f'_s$

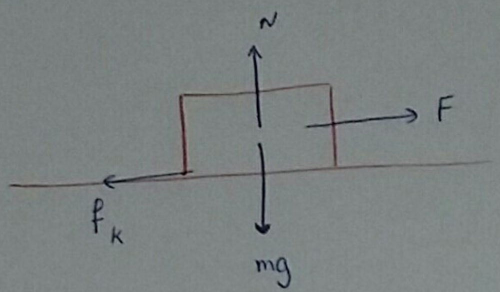
(۱,۵)

$N' \mu_s \geq \frac{11}{10} mg \Rightarrow Mg\mu_s \geq \frac{11}{10} mg$

$\rightarrow \mu_s \geq 11/50 \xrightarrow{\text{حداقل}} \mu_s = \frac{11}{50}$

سؤال ٤

۶ نمره



$\vec{F} = (\alpha x + \beta x^{۲})\,\hat{i}$ متغیر

$\beta = -۳$

$m = ۲ \ kg$

$\mu_k = ۰/۵$

$x_۱ = ۲$

$x_۲ = ۵$

$V_۱ = ۱۰ \ m/s$

$V_۲ = ۲۰ \ m/s$

---

۲ نمره

$W_{کل} = \Delta K$

$K_۱ = \frac{۱}{۲} m V_۱^{۲} = \frac{۱}{۲}(۲)(۱۰)^{۲} = ۱۰۰ \ J$

$K_۲ = \frac{۱}{۲} m V_۲^{۲} = \frac{۱}{۲}(۲)(۲۰)^{۲} = ٤۰۰ \ J$

$\Delta K = K_۲ - K_۱ = ٤۰۰ - ۱۰۰ = ۳۰۰ \ J$

۳/۵ نمره

$W_{کل} = W_f + W_F$

$\begin{cases} N = mg \\ d = x_۲ - x_۱ = ۵ - ۲ = ۳ \end{cases}$

$f_k = \mu_k N = \mu_k mg$

$W_{f_k} = -f_k d = -\mu_k mg d = -(۰/۵)\times(۲)\times(۱۰)\times(۳) = -۳۰ \ J$

$W_F = \int \vec{F}\cdot d\vec{x} = \int (\alpha x + \beta x^{۲})\,dx = \alpha \frac{۱}{۲} x^{۲} \Big]_{x_۱}^{x_۲} + \beta \frac{۱}{۳} x^{۳} \Big]_{x_۱}^{x_۲}$

$= \frac{\alpha}{۲}\left[(۵)^{۲} - (۲)^{۲}\right] + \frac{\beta}{۳}\left[(۵)^{۳} - (۲)^{۳}\right] = \alpha \frac{۲۱}{۲} + \beta \frac{۱۱۷}{۳} = \alpha \frac{۲۱}{۲} - ۱۱۷$

۰/۵ نمره

$W_{کل} = \Delta K$

$(\alpha \frac{۲۱}{۲} - ۱۱۷) - ۳۰ = ۳۰۰ \Rightarrow (\alpha \frac{۲۱}{۲} - ۱۱۷) = ۳۳۰$

$\Rightarrow \alpha = \frac{٤٤۷ \times ۲}{۲۱} = ٤۲/۵۷$

۵. مطابق شکل جسم کوچک m به جرم ۱۰۰ گرم روی فنری با ثابت فنر k گذاشته شده است. فنر را با جسم به اندازه‌ی ۶ سانتی متر متراکم کرده سپس مجموعه را از حال سکون رها می‌کنیم. (شعاع حلقه در شکل ۱۲ سانتی‌متر و فاصله A تا B قبل از فشرده شدن فنر ۳۰ سانتی‌متر است و سطح بین جسم و دیواره در کل مسیر بدون اصطکاک است.)

الف) حداقل ثابت فنر k را چنان تعیین کنید که جسم بتواند بدون جدا شدن از حلقه آن را دور بزند.

اگر ثابت فنر $k = 300\frac{N}{m}$ باشد:

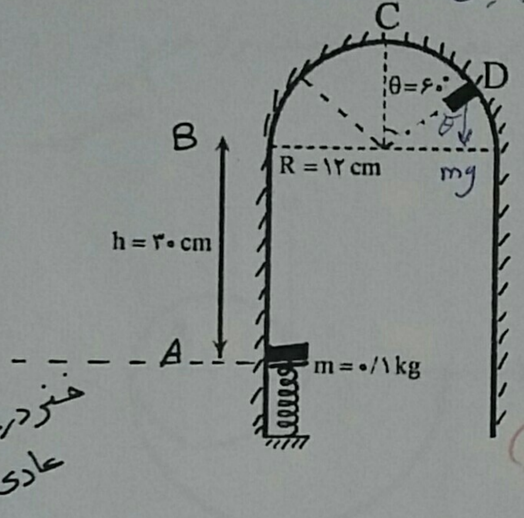
ب) شتاب شعاعی (مرکزگرا) و اندازه‌ی شتاب کل جسم m را در نقطه‌ی D به دست آورید.

ج) نیروی عمودی سطح در نقطه‌ی D را به دست آورید. (نمودار جسم آزاد m در نقطه‌ی D را رسم کنید.)

(۶ نمره)

۲

پایستگی انرژی مکانیکی ← نیروهای پایستار



۰٫۲۵ $E_1 = E_2$

۰٫۵ $C: mg = \frac{mv^2}{R} \longrightarrow v^2 = Rg$

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C$ ۰٫۵

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mRg + mgh_C$

۰٫۵ $\frac{1}{2}k(0.06)^2 = mg(0.12) + 2mg(0.3 + 0.12 + 0.06)$

$k = 300\ \frac{N}{m}$ ۰٫۲۵

ب) ۲٫۵

۰٫۵ $ma_T = mg\sin\theta \rightarrow a_T = g\sin\theta \Rightarrow a_T = 10 \times \sin 60 = \frac{10\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\ \frac{m}{s^2}$

$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mgh_D \rightarrow \frac{1}{2}(300)(0.06)^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 + mg(0.3 + 0.06 + R\cos 60 + 0.06)$

$0.54 = 0.05 v_D^2 + 0.42 \rightarrow v_D^2 = 2.4\ \frac{m}{s}$ ۱ , ۰٫۵ $a_R = \frac{v_D^2}{R} = \frac{2.4}{0.12} = 20\ \frac{m}{s^2}$

۰٫۵ $a_T = \sqrt{a_R^2 + a_T^2} = \sqrt{(20)^2 + (5\sqrt{3})^2}$

۱٫۵ (ج

۱ $N + mg\cos\theta = ma_R$

$N = ma_R - mg\cos\theta = 2 - \frac{1}{2} = 1.5\ N$

۰٫۵

جای خالی: میله

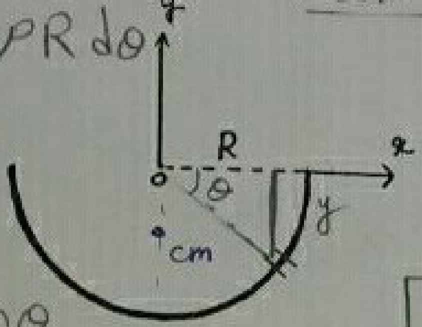
۶. الف) مختصات مرکز جرم میله‌ی یکنواخت باریکی به شکل نیمدایره به شعاع R را در دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل، به دست آورید.

$m = \rho l = \rho(\pi R)$

$dm = \rho dl = \rho R d\theta$

$\sin\theta = \frac{y}{R} \Rightarrow y = R\sin\theta$

به دلیل تقارن مرکز جرم روی محور y قرار دارد ← اما $x_{com} = 0$



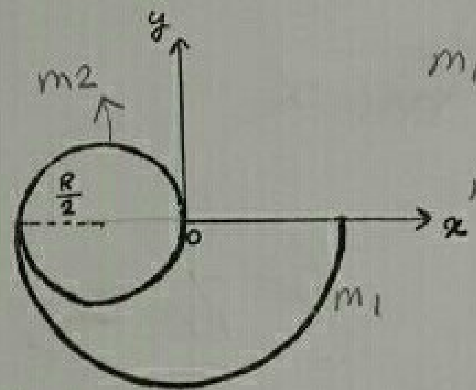
$$y_{com} = \frac{1}{M}\int y\,dm = \frac{1}{\rho\pi R}\int R\sin\theta(\rho R)d\theta$$

$$= \frac{R}{\pi}\int \sin\theta\, d\theta = -\frac{R}{\pi}\cos\theta \Big|_{-\pi}^{0}$$

$$y_{com} = -\frac{2R}{\pi}$$

ب) درون این نیم‌حلقه، حلقه‌ای به همان جرم و شعاع $\frac{R}{2}$ جوش می‌دهیم. حال مختصات مرکز جرم مجموعه را در دستگاه مختصات نشان داده شده در شکل، به دست آورید.

(۴ نمره)



$m_1 \rightarrow (0, -\frac{2R}{\pi})$ مرکز جرم میله در قسمت الف

$m_2 \rightarrow (-\frac{R}{2}, 0)$ مرکز جرم حلقه

$m_1 = m_2 = m$

$$x_{com} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(0) + m(-\frac{R}{2})}{2m} = -\frac{R}{4}$$

$$y_{com} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m(-\frac{2R}{\pi}) + m(0)}{2m} = -\frac{R}{\pi}$$

مختصات مرکز جرم مجموعه: $-\frac{R}{4}$ ، $-\frac{R}{\pi}$

«موفق باشید»